

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1949-010

De differentiaaloperator van Lie

"Elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht"

Prof.dr. J.A. Schouten



Voordracht door Prof. Dr. J.A. Schouten
in de serie Elementaire onderwerpen van hoger
standpunt uit.

"De differentiaaloperator van Lie"

Coördinaten in X_n : ξ^k ; $k = 1, \dots, n$ Transformatie van een coördinatenstelsel
(K) in een ander coördinatenstelsel (K')

$$1) \quad \xi^{k'} = \xi^{k'}(\xi^k); A_k^{k'} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_k \xi^{k'}; \text{Det}(A_k^{k'}) \neq 0$$

Functies analytisch in het beschouwde gebied.

Enige grootheden

Scalar p : invariant

Contrav. vector u^k : $u^{k'} = A_k^{k'} u^k$

cov. vector w_λ : $w_{\lambda'} = A_\lambda^{\lambda'} w_\lambda$

affinor, bijv. $P^{\kappa\lambda}_{\mu}$: $P^{\kappa\lambda}_{\mu'} = A_\kappa^{\kappa'} A_\lambda^{\lambda'} A_{\mu'}^\mu P^{\kappa\lambda}_{\mu}$

Grootheden gegeven als functies der ξ^k heten velden.

Punttransformaties in X_n . Laat een gebied R van X_n door de omkeerbare
punttransformatie

$$2) \quad \eta^\lambda = f^\lambda(\xi^k); \text{Det}(\partial_k \eta^\lambda) \neq 0$$

overgaan in een gebied R' . Zowel ξ^k als η^λ zijn coördinaten t.o.v.
het coördinatenstelsel (K). Introduceer nu in R' een nieuw coördina-
stelsel (K') zodat de $\eta^{k'}$ numeriek gelijk worden aan de ξ^k van het
beeldpunt in R:

$$3) \quad \eta^{k'} = \delta_k^{k'} \xi^k; \quad \delta_k^{k'} = \begin{cases} 1 & \text{als } k \text{ en } k' \text{ correspon} \\ 0 & \text{in het andere geval} \end{cases}$$

Is dan

$$4) \quad \xi^k = \varphi^k(\eta^\lambda)$$

de omkering van (2) dan is

$$5) \quad \eta^{k'} = \delta_k^{k'} \varphi^k(\eta^\lambda)$$

voor iedere keuze van η^λ . Dus is de transformatie (K) $\rightarrow$ (K') gegeven door

$$6) \quad \xi^{k'} = \delta_k^{k'} \varphi^k(\xi^\lambda)$$

De overgang (K) $\rightarrow$ (K') heet het meeslepen van het coördinatensysteem (K)

door de punttransformatie (2). Populaire voorstelling: Vul X_n met
gelatine en teken in de gelatine een fijn coördinatennetwerk van (K).
Transformeer dan de X_n met gelatine en al, dan gaat het netwerk over
in het netwerk van (K').

Meeslepen van een veld. Laat nu een veld bijv. $P^{\kappa\lambda}_{\mu}$ gegeven zijn in
 R en construeer in R' een ander veld, welks kentallen $P^{\kappa\lambda}_{\mu'}$ ten op-
zichte van K' numeriek gelijk zijn aan de $P^{\kappa\lambda}_{\mu}$ in het beeldpunt

in R . Dan zegt men dat P_2 ontstaat uit P_1 door het meeslepen van het veld P_1 door de punttransformatie (2). Populaire voorstelling: teken de grootheid in een groot aantal punten van R op infinitesimale schaal in het netwerk van (K) in de gelatine (bijv. als pijltje als de grootheid een contravariante vector). Transformeer de X_n met de gelatine, dan ontstaat het meegesleepte veld.

Stel dat R en R' een gebied gemeen hebben. Dan kan men P_1 en P_2 met elkaar vergelijken. Is dan $P_{1.. \mu}^{\kappa} = P_{2.. \mu}^{\kappa}$ (nu natuurlijk betrokken op hetzelfde coördinatenstelsel) dan zegt men dat het veld P_1 invariant is t.o.v. de punttransformatie (2).

Infinitesimale punttransformaties. Beschouw vectorveld $v^{\kappa} = \psi^{\kappa}(\xi^{\lambda})$ de differentiaalvergelijking

$$7) \quad \frac{d\eta^{\kappa}}{dt} = \psi^{\kappa}(\eta^{\lambda})$$

waarin t een onafhankelijke parameter is en de η^{κ} worden beschouwd als functies der ξ^{κ} . Laten de beginvoorwaarden zijn $\eta^{\kappa} = \xi^{\kappa}$ voor $t=0$. De oplossing heeft de vorm

$$8) \quad \eta^{\kappa} = \xi^{\kappa} + \psi^{\kappa}(\xi^{\lambda})t + \dots$$

en dit stelt bij veranderlijke ξ^{κ} een punttransformatie van X_n voor, die van één parameter afhangt. Is t de tijd dan schuiven de punten van X_n langs de stroomlijnen van het veld v^{κ} , dat zijn de krommen die overal de richting van de plaatselijke vector v^{κ} hebben. De omkering van (8) heeft de vorm

$$9) \quad \xi^{\kappa} = \eta^{\kappa} - \psi^{\kappa}(\eta^{\lambda})t + \dots$$

Wordt dus nu (k) meegeslept dan geeft (6) de transformatie $(k) \rightarrow (k')$.

$$10) \quad \begin{aligned} \xi^{\kappa'} &= \delta_{\kappa}^{\kappa'} \xi^{\kappa} - \delta_{\kappa}^{\kappa'} v^{\kappa} t + \dots \\ \xi^{\lambda} &= \delta_{\lambda}^{\lambda'} \xi^{\lambda'} + v^{\lambda} t + \dots \end{aligned}$$

en dus

$$11) \quad \begin{aligned} A_{\lambda}^{\lambda'} &= \delta_{\lambda}^{\lambda'} (A_{\lambda}^{\kappa} - t \partial_{\lambda} v^{\kappa} + \dots) \\ A_{\kappa}^{\lambda'} &= \delta_{\kappa}^{\lambda'} (A_{\lambda}^{\kappa} + t \partial_{\lambda} v^{\kappa} + \dots) \end{aligned}$$

(8) en (9) stellen een éénledige (d.w.z. van een parameter afhangende) transformatiegroep voor. Verwaarloost men in (10) alle hogere machten van t en schrijft men dt in plaats van t dan krijgt men wat Lie noemt de infinitesimale transformatie die de eenledige groep voortbrengt (erzeugt):

$$12) \quad \xi^{\kappa} \rightarrow \xi^{\kappa} + \psi^{\kappa}(\xi^{\lambda}) dt$$

Daarbij behoort de coördinatentransformatie: $(k) \rightarrow (k')$

$$13) \quad \begin{aligned} \xi^{\kappa} &= \delta_{\kappa}^{\kappa'} \xi^{\kappa'} - \delta_{\kappa}^{\kappa'} v^{\kappa} dt & A_{\lambda}^{\lambda'} &= \delta_{\lambda}^{\lambda'} (A_{\lambda}^{\kappa} + \partial_{\lambda} v^{\kappa} dt) \\ \xi^{\lambda} &= \delta_{\lambda}^{\lambda'} \xi^{\lambda'} + v^{\lambda} dt & A_{\kappa}^{\lambda'} &= \delta_{\kappa}^{\lambda'} (A_{\lambda}^{\kappa} - \partial_{\lambda} v^{\kappa} dt) \end{aligned}$$

Wordt een coördinatenstelsel of een veld door de infinitesimale transformatie (12) meegesleept, dan zegt men dat het over $v^k dt$ wordt meegesleept. Neem b.v. het veld P^k_{λ} . Dan zijn de kentallen van het meegesleepte veld in $\xi^k + v^k dt$ ten opzichte van (k) numeriek gelijk aan de P^k_{λ} ter plaatse ξ^k . De kentallen aldaar t.o.v. (k) zijn dus blijvend.

$$(14) \quad A^{\rho'}_{\lambda} A^{\kappa}_{\sigma} \delta^{\sigma'}_{\sigma} \delta^{\rho}_{\rho'} P^{\sigma}_{\rho} = (A^{\rho}_{\lambda} - \partial_{\lambda} v^{\rho} dt) P^{\sigma}_{\rho} (A^{\kappa}_{\sigma} + \partial_{\sigma} v^{\kappa} dt) = \\ = P^{\kappa}_{\lambda} - P^{\kappa}_{\rho} \partial_{\lambda} v^{\rho} dt + P^{\sigma}_{\lambda} \partial_{\sigma} v^{\kappa} dt$$

en de kentallen ter plaatse ξ^k vinden we door van deze waarde nog $v^{\mu} \partial_{\mu} P^{\kappa}_{\lambda} dt$ af te trekken. Voor de veldwaarde in ξ^k t.o.v. (k) , die met de veldwaarde P^{κ}_{λ} aldaar vergelijkbaar is, volgt dan

$$(15) \quad P^{\kappa}_{\lambda} - v^{\mu} \partial_{\mu} P^{\kappa}_{\lambda} dt - P^{\kappa}_{\rho} \partial_{\lambda} v^{\rho} dt + P^{\sigma}_{\lambda} \partial_{\sigma} v^{\kappa} dt$$

Het verschil van de oude en de nieuwe veldwaarde ter plaatse ξ^k heet de differentiaal van Lie t.o.v. $v^k dt$ en de uitdrukking

$$(16) \quad \square P^{\kappa}_{\lambda} = v^{\mu} \partial_{\mu} P^{\kappa}_{\lambda} + P^{\kappa}_{\rho} \partial_{\lambda} v^{\rho} - P^{\sigma}_{\lambda} \partial_{\sigma} v^{\kappa}$$

de afgeleide van Lie van het veld P^{κ}_{λ} t.o.v. het veld v^k . (Voor meer indices net zo, voor elke boven (onder) index komt er een term met een negatief (positief) teken. Is er een symmetrische lineaire overbrenging dan mag men in (16) ∂_{μ} vervangen door ∇_{μ} . Vormingen van dit soort reeds bij Lie, expliciete opstelling voor bijzondere gevallen, Weitzenböck, Invariantentheorie 1923, 375, Lepage 1929, algemeen Slebodzinski 1931. Beide onafhankelijk van Lie. Naam voorgesteld door van Dantzig 1932. Toegepast op deformatieproblemen door Schouten-v.Kampen 1933. Sindsdien veel gebruikt voor deformatieproblemen vooral door Engelse auteurs.

De zes covariante differentialen. Laat in de X_n een lineaire overbrenging gegeven zijn met parameters $\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}$

(bijv. met Riemannscheruimte $\mathcal{U}^{\kappa}_n$ met fundamentealtensor $g_{\lambda\lambda} : \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} = \{\}_{\mu\lambda}^{\kappa}$)

Zij ϕ een veld (indices onderdrukt)

Dan zijn er in $\xi^k + v^k dt$ in het algemeen (niet altijd) drie veldwaarden:

de gewone veldwaarde $\phi + d\phi$

de pseudop.versch.veldw. $\phi + \overset{*}{d}\phi$

de meegesleepte veldw. $\phi + \overset{v}{d}\phi$

De verschillen zijn:

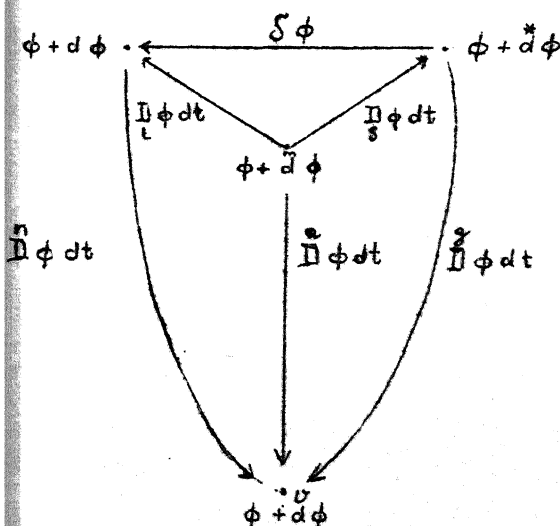
de covariante differentiaal $\delta \phi$

de Lie differentiaal $\square \phi dt$

de schijnbare differentiaal $\overset{\delta}{\square} \phi dt$

Bovendien kan het zijn dat er tengevolge van de deformatie in $\xi^k + v^k dt$ een waarde ontstaat

de gevarieerde veldwaarde $\overset{\delta}{\square} \phi dt$



(bijv. als ϕ de kromming of de torsie van een over $v^k dt$ verplaatste kromme is). Dan ontstaan er nog drie covariante differentiaten.

de natuurlijke variatie $dt \overset{\circ}{D} \phi = \overset{\circ}{D} \phi \cdot d\phi$

de absolute variatie $dt \overset{a}{D} \phi = \overset{a}{D} \phi \cdot \overset{a}{d} \phi$

de geodetische variatie $dt \overset{g}{D} \phi = \overset{g}{D} \phi \cdot \overset{g}{d} \phi$

De absolute variatie is de belangrijkste. Sleep het gevarieerde veld in $\xi^k + v^k dt$ terug naar ξ^k . Dan is de veldwaarde aldaar $\phi + \overset{a}{D} \phi \cdot \overset{a}{d} \phi = \phi + \overset{a}{D} \phi dt$. $\overset{a}{D} \phi$ geeft dus precies de invloed der deformatie. Voor de differentiaalquotienten $\overset{a}{D} \phi$, $\overset{g}{D} \phi$, $\overset{\circ}{D} \phi$ geldt

ϕ met rust gelaten	ϕ meegesleept	ϕ pseudoparallel verpl.
$\overset{\circ}{D} \phi = 0$	$\overset{a}{D} \phi = 0$	$\overset{g}{D} \phi = 0$
$\overset{a}{D} \phi = \overset{a}{D} \phi$	$\overset{g}{D} \phi = -\overset{g}{D} \phi$	$\overset{\circ}{D} \phi = -\frac{\delta \phi}{dt}$
$\overset{g}{D} \phi = \frac{\delta \phi}{dt}$	$\overset{\circ}{D} \phi = -\overset{\circ}{D} \phi$	$\overset{a}{D} \phi = \overset{a}{D} \phi$

Voorbeeld 1 In een $\mathcal{U}_n$ wordt de punttransformatie $\xi^k \rightarrow \xi^k + v^k dt$ uitgevoerd. Hoe verandert het lijnelement? Sleep (k) mee dan is

$\overset{a}{D} d\xi^k = 0$ en laat $g_{\lambda k}$ met rust, dan is $\overset{a}{D} g_{\lambda k} = \overset{a}{D} g_{\lambda k}$

$$\begin{aligned}
 18) \quad \overset{a}{D} ds &= \overset{a}{D} (g_{\lambda k} d\xi^\lambda d\xi^k)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{ds} d\xi^\lambda d\xi^k \overset{a}{D} g_{\lambda k} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{ds} d\xi^\lambda d\xi^k (\overset{a}{D} g_{\lambda k} + g_{\rho k} \overset{a}{D} v^\rho + g_{\lambda \rho} \overset{a}{D} v^\rho) \\
 &= \nabla_{(k} v_{\lambda)} \frac{d\xi^\lambda}{ds} \cdot \frac{d\xi^k}{ds} ds
 \end{aligned}$$

Dus is de maat invariant als

$$19) \quad k_{\lambda k} = \nabla_{(k} v_{\lambda)} = 0 \quad (\text{vergelijking en tensor van Killing})$$

Voorbeeld 2. Deformatie van een kromme in $\mathcal{U}_n$. Sleep het coördinaatstelsel (k) mee en sleep ook de maat s op de kromme mee. Sleep later de kromme met s en het veld $g_{\lambda k}$ terug over $v^k dt$

$$\begin{aligned}
 20) \quad dt \overset{a}{D} \int_{s_1}^{s_2} ds &= dt \int \overset{a}{D} ds = dt \int \overset{a}{D} v_k \frac{d\xi^k}{ds} ds = \\
 &= dt \int_{s_1}^{s_2} \delta v_k = dt (j_\lambda^k v_k)_{s=s_2} - dt (j_\lambda^k v_k)_{s=s_1} - \\
 &\quad - dt \int_{s_1}^{s_2} v_k \frac{d}{ds} j_\lambda^k ds
 \end{aligned}$$



1^e $v^k = 0$ in de eindpunten verder willekeurig. $\frac{d}{ds} j_\lambda^k = 0$ is de eerste voorwaarde voor een geodetische lijn

$$2^e \quad \overset{a}{D} ds = j_\lambda^k \delta v_k = -v_k \delta j_\lambda^k + \delta (v_k j_\lambda^k)$$

is nul voor een geodetische lijn indien overal $v^k \perp j_\lambda^k$

Men kan verder gaan en vragen naar de variatie van de 1^e kromming, 2^e kromming, enz. Dit gebeurt met behulp van de operator $\overset{a}{D} \nabla_\mu - \nabla_\mu \overset{a}{D}$ die de regel van Leibnitz volgt bij toepassing op producten en waar van het resultaat voor de drie gevallen veld in rust, veld meegesleept en veld pseudoparallel verplaatst kan worden uitgerekend. doen dit voor de eerste kromming voor het geval van een $\mathcal{U}_m$ in

overal is j_λ^k de vector van j_1^k

Voorbeeld 3. Deformatie van een V_m in V_n . De V_m zij:

$$22) \quad \xi^x = f^x(\eta^a); \quad a = 1, \dots, m$$

of

$$23) \quad F^x(\xi^x) = 0; \quad x = m+1, \dots, n$$

De η^a zijn coördinaten in V_m . De grootheden

$$24) \quad B_\beta^x = \partial_\beta \xi^x; \quad C_\lambda^x = \partial_\lambda F^x$$

zijn de contra- en de covariante verbindingsgrootheid der V_m . De fundamenteeltensor in V_m is

$$25) \quad g_{\beta\alpha} = B_\beta^x B_\alpha^x g_{xx}$$

Met behulp van $B_\beta^x, C_\lambda^x, g_{\beta\alpha}, g_{xx}$ kan men iedere grootheid in X_m of in een locale $R_{n-m} \perp X_m$ als grootheid in X_n opvatten en dus kentallen in X_n met grijde indices geven. Bijv.

$$26) \quad B_\lambda^x = g^{ab} B_\beta^x g_{\lambda\alpha} B_a^x$$

Sleep ~~(u)~~ mee en ook het coördinatenstelsel (a) in X_m . Laat $g_{\lambda\kappa}$ in rust. Dan is $\bar{D} B_\beta^x = 0$ en dus

$$27) \quad \bar{D} g_{\beta\alpha} = B_\beta^x B_\alpha^x \bar{D} g_{xx} = B_\beta^x B_\alpha^x D_\lambda g_{xx} = 2 B_\beta^x B_\alpha^x h_{\lambda\kappa}$$

Is $'g = \det(g_{\beta\alpha})$ dan is

$$28) \quad g^{ab} = \frac{\partial \log 'g}{\partial g_{\beta\alpha}}$$

en dus

$$29) \quad \bar{D} 'g = 2 'g g^{ab} B_\beta^x B_\alpha^x \nabla_\lambda v_\kappa$$

Het volume-element van V_m is $d\tau_m = g^{1/2} d\eta^1 \dots d\eta^m$. Bijgevolg is

$$30) \quad \bar{D} d\tau_m = \frac{1}{2} 'g^{1/2} d\eta^1 \dots d\eta^m \cdot 2 'g g^{ab} B_\beta^x B_\alpha^x \nabla_\lambda v_\kappa \\ = 'g^{ab} B_\beta^x B_\alpha^x \nabla_\lambda v_\kappa d\tau_m = 'g^{\rho\sigma} B_\rho^x B_\sigma^x \nabla_\lambda v_\kappa d\tau_m$$

Is $v^k \perp V_m$, dus $B_\lambda^k v_k = 0$ dan komt er

$$31) \quad \bar{D} d\tau_m = - 'g^{\rho\sigma} B_\rho^x B_\sigma^x \nabla_\lambda B_\sigma^k d\tau_m = - 'g^{\mu\lambda} \mathcal{H}_{\mu\lambda}^{\dots k} v_k d\tau_m = -m M v_k d\tau_m$$

maar

$$32) \quad \mathcal{H}_{\mu\lambda}^{\dots k} = B_\mu^\sigma B_\lambda^\rho \nabla_\rho B_\sigma^k$$

de kromteaffinor der X_m en $M^k = \frac{1}{m} 'g^{\mu\lambda} \mathcal{H}_{\mu\lambda}^{\dots k}$ de gemiddelde kromtevector der V_m is. V_m is een minimaal- V_m als $M^k = 0$. Is dan $v^k \perp V_m$ dan is de variatie van ieder volumeelement nul. Is v^k niet $\perp V_m$ maar $= 0$ op de rand van een gebied τ_m dan is

$$33) \quad dt \int_{\tau_m} d\tau_m = - dt \int_{\tau_m} m M^k v_k d\tau_m + dt \int_{\tau_m} \nabla_\lambda ('g^{\lambda\kappa} v_\kappa) d\tau_m$$

De tweede integraal verdwijnt ingevolge Stokes en de eerste integraal is nul voor $M^k = 0$.

De variatie van $\mathcal{H}_{\mu\lambda}^{\dots\kappa}$ wordt als volgt gevonden

$$34) \quad \overset{a}{D} \mathcal{H}_{\mu\lambda}^{\dots\kappa} = \overset{a}{D} B_{\mu}^{\sigma} B_{\lambda}^{\rho} \nabla_{\rho} B_{\sigma}^{\kappa} = B_{\mu}^{\sigma} B_{\lambda}^{\rho} \overset{a}{D} \nabla_{\rho} B_{\sigma}^{\kappa}$$

Maar nu kan men uitrekenen dat

$$35) \quad (\overset{a}{D} \nabla_{\rho} - \nabla_{\rho} \overset{a}{D}) B_{\sigma}^{\kappa} = -B_{\sigma}^{\nu} v_{\nu\rho}^{\kappa} + B_{\tau}^{\kappa} v_{\sigma\rho}^{\tau}$$

$$v_{\nu\lambda\mu} \stackrel{def}{=} -\nabla_{\lambda} \nabla_{(\nu} v_{\mu)} + \nabla_{\nu} (\nabla_{\lambda} v_{\mu}) - \nabla_{\mu} \nabla_{(\lambda} v_{\nu)}$$

en dus

$$36) \quad \overset{a}{D} \mathcal{H}_{\mu\lambda}^{\dots\kappa} = -B_{\mu}^{\sigma} B_{\lambda}^{\rho} v_{\sigma\rho}^{\kappa} + B_{\mu}^{\sigma} B_{\lambda}^{\rho} B_{\tau}^{\kappa} v_{\sigma\rho}^{\tau} + B_{\mu}^{\sigma} B_{\lambda}^{\rho} \nabla_{\rho} \overset{a}{D} B_{\sigma}^{\kappa}$$

Nu is

$$37) \quad \overset{a}{D} B_{\sigma}^{\kappa} = \overset{a}{D} g^{ab} B_{\sigma}^{\nu} g_{\sigma\nu} B_a^{\kappa} =$$

$$= B_{\sigma}^{\nu} B_a^{\kappa} \overset{a}{D} g_{ab} g_{\sigma\nu} =$$

$$= 2 g^{\nu\kappa} C_{\sigma}^{\rho} k_{\nu\rho}$$

en dus

$$38) \quad B_{\mu}^{\sigma} B_{\lambda}^{\rho} \nabla_{\rho} \overset{a}{D} B_{\sigma}^{\kappa} = 2 B_{\mu}^{\sigma} B_{\lambda}^{\rho} \nabla_{\rho} g^{\nu\kappa} C_{\sigma}^{\rho} k_{\nu\rho} =$$

$$= -2 g^{\nu\kappa} k_{\nu\rho} \mathcal{H}_{\mu\lambda}^{\dots\rho}$$

zodat tenslotte

$$39) \quad \overset{a}{D} \mathcal{H}_{\mu\lambda}^{\dots\kappa} = -B_{\mu}^{\sigma} B_{\lambda}^{\rho} C_{\tau}^{\kappa} v_{\sigma\rho}^{\tau} - 2 g^{\nu\kappa} k_{\nu\rho} \mathcal{H}_{\mu\lambda}^{\dots\rho}$$

Hieruit volgt als n.e.v. voorwaarde voor een transformatie die ieder geodetische V_m ($\mathcal{H}_{\mu\lambda}^{\dots\kappa} = 0$) geodetisch laat:

$$40) \quad B_{\mu}^{\sigma} B_{\lambda}^{\rho} C_{\tau}^{\kappa} v_{\sigma\rho}^{\tau} = 0$$

voor iedere keuze van B_{λ}^{κ} en C_{λ}^{κ} . Dit is alleen mogelijk indien

$$41) \quad -v_{\kappa\lambda\mu} = \nabla_{\lambda} \nabla_{(\kappa} v_{\mu)} - \nabla_{\kappa} \nabla_{(\lambda} v_{\mu)} + \nabla_{\mu} \nabla_{(\lambda} v_{\kappa)} = g_{\kappa}(\lambda P_{\mu)}$$

waar P_{λ} een willekeurige vector is. Voor een R_n (euklidische V_n) gaat overal ∇_{λ} in ∂_{λ} over en ontstaat de differentiaalvergelijking der infinitesimale transformaties die alle vlakke uitgebreidheden vlak laten.

Litteratuur:

- Th. Lepage, Mém. Acad. Roy. Belg. 1929
- W. Slebodzinski, Sur les équations canoniques de Hamilton,
Bull. Acad. Belg. (5) 17 (1931) 864-870
- D.v. Dantzig, Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie II,
Proc. Kon. Ned. Akad. 35 (1932) 535-542; Electromagnetism, independent of metrical geometry 3, Proc. Kon. Akad. 37 (1934) 644-652; On the thermo-hydrodynamics of perfectly perfect fluids I, Proc. Kon. Ned. Akad. 43 (1940) 387-402
- J.A. Schouten en E.R. van Kampen, Beiträge zur Theorie der Deformation, Prac. Mat. Fiz. Warschau 41 (1933) 1-19
- H.A. Hayden, Infinitesimal transformations of sub-spaces in a general metric space, Proc. Lond. Math. Soc. 2.37 (1934) 410-440. Infinitesimal transformations of an L_m in an L_n .
- J.A. Schouten en D.J. Struik, Einführung I (1935) 140 e.v. II (1936) 161 e.v.
- E.T. Davies, On the infinitesimal deformations of a space, Ann. di Math. IV 12 (33-34) 145-151; On the deformation of a subspace, Journ. Lond. Math. Soc. 2 (1936) 295-301; On the second and third fundamental forms of a subspace, Journ. Lond. Math. Soc. 12 (1937) 290-295; Analogues of the Frenet formula determined by deformation operators, Journ. Lond. Math. Soc. 13 (1938) 210-216; Lie derivation in generalized metric spaces, Am. Math. Pure Appl. 18 (1939) 261-274; The first and second variations of the volume integral in Riemannian space, Quart. Journ. Math. Oxford 13 (1941) 58-64; On the isomorphic transformations of a space of K-spreads, Journ. Lond. Math. Soc. 18 (1943) 100-107; The geometry of multiple integral, Journ. Lond. Math. Soc. 20 (1945) 163-170; On motions in a metric space Quart. Journ. Math. Oxford 16 (1945) 22-30; Subspaces of a Finsler space, Proc. Lond. Math. Soc. 2. (1945) 19-39.
- P. Dienes, Sur la déformation des sous-espaces dans un espace à connexion linéaire générale, C.R. 197 (1933) 1082-1084. On the deformation of tensor manifolds, Proc. Lond. Math. Soc. 2.37 (1934) 512-519; Sur la déformation des espaces à connexion linéaire générale, C.R. 197 (1933) 1084-1085. On curves in a space of general linear connection, Journ. Lond. Math. Soc. 9 (1934) 259-266; tezamen met E.T. Davies: On the infinitesimal deformations of tensor submanifolds, Journ. de Math. 16 (1937) 111-150 (presented in 1933).